Доклады Национальной академии наук Беларуси

2016 март–апрель Том 60 № 2

МАТЕМАТИКА

УДК 511.42

В. И. БЕРНИК[1], *Ф. ГЁТЦЕ*[2], *А. Г. ГУСАКОВА*[1]

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ТОЧКИ В КОРОТКИХ ИНТЕРВАЛАХ

(Представлено академиком В. И. Корзюком)

[1]*Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь*
bernik.vasili@mail.ru; gusakova.anna.0@gmail.com
[2]*Университет г. Билефельда, Германия*
goetze@math.uni-bielefeld.de

При достаточно большом натуральном числе Q существуют интервалы $I \subset [0,1)$ длины $c_1(n)Q^{-1}$, не содержащие алгебраических чисел никакой степени n и высоты $H(P) \le Q$. В сообщении найдено условие на интервалы I в терминах диофантовых приближений, при котором интервалы длины $c_2(n)Q^{-\gamma}$, $\gamma > 1$, содержат не менее, чем $c_3(n)Q^{n-2\gamma+1}$ алгебраических чисел α высоты $H(\alpha) \le Q$ и степени $\deg\alpha = n > 2\gamma - 1$.

Ключевые слова: алгебраические числа, многочлен с целыми коэффициентами, результант, мера Лебега.

V. I. BERNIK[1], *F. GOETZE*[2], *H. G. HUSAKOVA*[1]

ALGEBRAIC NUMBERS IN SHORT INTERVALS

[1]*Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus*
bernik.vasili@mail.ru; gusakova.anna.0@gmail.com
[2]*Bielefeld University, Germany*
goetze@math.uni-bielefeld.de

For sufficiently large Q there exist the intervals $I \subset [0,1)$ of length $c_1(n)Q^{-1}$, that do not contain algebraic numbers of any degree n and of height $H(P) \le Q$. In this article we have found an condition for intervals I in terms of the Diophatine approximations when the intervals of length $c_2(n)Q^{-\gamma}$, $\gamma > 1$, contain not less than $c_3(n)Q^{n-2\gamma+1}$ algebraic numbers α of height $H(\alpha) \le Q$ and degree $\deg\alpha = n > 2\gamma - 1$.

Keywords: algebraic numbers, polynomial with integer coefficients, resultant, Lebesgue measure.

Во многих математических теоремах используется тот факт, что рациональные точки есть в любых интервалах произвольной длины. Другими словами, множество рациональных чисел всюду плотно во множестве действительных чисел. Более сильными понятиями, чем свойство всюду плотности, являются понятия равномерной распределеннности [1] и регулярности [2]. На этих понятиях мы не будем останавливаться, лишь отметим, что количество членов последовательности, взятых каким-нибудь естественным образом, пропорционально длине интервала (равномерное распределение) или отличается на разных интервалах равной длины в конечное число раз (регулярное распределение).

В теории чисел многие свойства трансцендентных чисел проявляются при изучении их приближений алгебраическими числами [3; 4]. Поэтому важно знать, как распределены алгебраические числа.

Для многочленов

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \in \mathrm{Z}[x],\ a_n \ne 0$$

обозначим через $\deg P = n$ – степень многочлена $P(x)$, а через $H = H(P) = \max\limits_{0 \le j \le n} |a_j|$ – высоту многочлена $P(x)$. Для достаточно большого натурального числа Q введем класс многочленов

$$P_n(Q) = \{\, P(x) \in \mathrm{Z}[x],\ \deg P \le n,\ H(P) \le Q \,\}.$$

Будем обозначать через $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ – корни $P(x)$; $c_1 = c_1(n), c_2, \ldots$ – величины, зависящие от n и не зависящие от H и Q; $\#A$ – количество элементов конечного множества A; μB – меру Лебега измеримого множества $B \subset R$. Множество всех корней α многочленов $P(x) \in \mathrm{P}_n(Q)$ обозначим через $T(P_n(Q))$. Ясно, что $\#P_n(Q) \le (2Q+1)^{n+1}$ и тогда $\#T(P_n(Q)) \le n(2Q+1)^{n+1}$. Известно [2], а для многочленов нечетной степени это очевидно, что $\#T(P_n(Q)) \cap R > c_1 Q^{n+1}$. В работе [5] доказано, что действительные алгебраические числа, упорядоченные по росту высоты минимальных многочленов, равномерно распределены только при $n = 1$, т. е. когда являются рациональными числами.

В данной работе мы будем изучать законы распределения множества $T(P_n(Q)) \cap [0,1)$ на коротких интервалах $I \in [0,1)$, $\mu I = Q^{-\gamma}$, $\gamma > 0$. Выбор интервала $[0,1)$ несущественен, можно взять любой конечный интервал.

Короткие интервалы ведут себя очень избирательно по отношению к алгебраическим числам. В недавно вышедшей работе [6] доказано, что:

а) существуют интервалы I_1 длины $\mu I_1 = 0{,}5 Q^{-1}$ такие, что $T(P_n(Q)) \cap I_1 = \varnothing$ при любом n;

б) при достаточно большой величине $c_2 > 0$ для любого интервала I_2, $\mu I_2 > c_2 Q^{-1}$, при подходящей величине $c_3 > 0$ справедливо

$$\#\{\, T(P(Q)) \cap I_2 \,\} > c_3 Q^{n+1} \mu I_2.$$

Ясно, что интервалов типа I_1 немного, ведь известно [2], что $\#\{T(P_n(Q)) \cap [0,1)\} > c_4 Q^{n+1}$.

В работе впервые дается ответ на следующий вопрос, какие условия надо наложить на n и интервалы I длины $\mu I = Q^{-\gamma_1}$, чтобы при любом $\gamma_1 > 1$ интервалы I содержали алгебраические точки из $T(P_n(Q))$. В [7] приведено условие для I при $\gamma_1 = \dfrac{3}{2}$.

Из теоремы Минковского о линейных формах [8] следует, что при любом $x \in [0,1)$ и $Q > 1$ найдется целочисленный многочлен $P(x)$, $H(P) \le Q$ такой, что

$$|\, P(x) \,| < 2(n+1) Q^{-n}. \qquad (1)$$

В неравенстве (1) показатель степени n наилучший, так как можно привести пример $x_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ такой, что $|\, P(x_1) \,| > c_4 Q^{-n}$. Из теоремы Спринджука [4] следует, что неравенство $|\, P(x) \,| < Q^{-w}$, $w > n$, может выполняться только для $x \in B_1 \subset [0,1)$, $\mu B_1 < \varepsilon_1$ при любом $\varepsilon_1 > 0$.

Это означает, что если множество B_2 состоит из точек $x \in [0,1)$, для которых $|\, P_k(x) \,| < c_5 H^{-k-1}$ и $H \le Q$ достаточно велико, то $\mu B_2 < \varepsilon_2$, где $\varepsilon_2 > 0$ – произвольно малая величина. Более того, известна оценка $\mu B_2 < c_6 Q^{-1/n}$ [9].

В следующей теореме на точки интервалов I налагается условие

$$\max_{x \in I} |\, P_1(x) \,| > c_7 H(P_1)^{-\deg P_1 - 1}. \qquad (2)$$

Это означает, что точки интервалов I не должны слишком хорошо приближаться алгебраическими числами α степени, меньшей n.

Т е о р е м а 1. *Пусть задан интервал I длины $\mu I = Q^{-\gamma_2}$, $\gamma_2 > 1$, точки которого удовлетворяют неравенству (2). Тогда при подходящем c_8 справедливо неравенство*

$$\#\{\, T(P_n(Q)) \cap I \,\} > c_8 Q^{n+1-\gamma_2} \mu I.$$

Основой доказательства теоремы 1 является следующее утверждение.

Т е о р е м а 2. *Пусть интервал I удовлетворяет условию теоремы 1. Обозначим через $B_3(\delta_0)$ множество точек, для которых система неравенств*

$$\begin{cases} |\, P(x) \,| < 2(n+1) Q^{-n}, \\ |\, P'(x) \,| < \delta_0 Q^{-\gamma_2 + 1}, \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение в полиномах $P(x) \in \mathrm{P}_n(Q)$. Тогда при достаточно малом δ_0 верно

$$\mu B_3(\delta_0) < \frac{1}{4}\mu I.$$

С х е м а д о к а з а т е л ь с т в а т е о р е м ы 2. Мы укажем, какие принципиальные изменения надо внести в рассуждения [6], чтобы получить необходимый результат. Возьмем $\varepsilon_3 > 0$ и найдем λ_0, при котором система неравенств

$$\begin{cases} |P(x)| < 2(n+1)Q^{-n}, \\ Q^{-\lambda_0-\varepsilon_3} \le |P'(x)| < \delta_0 Q^{-\lambda_0}, \end{cases} \tag{3}$$

выполняется на множестве с мерой, меньшей, чем $\frac{1}{s}\mu I$, где s – некоторое натуральное число, выбор которого будет сделан ниже.

Л е м м а 1. *Если α_1 – ближайший к x корень многочлена $P(x)$, то при $P'(x) \ne 0$, $P'(\alpha_1) \ne 0$ из (3) следует*

$$|x-\alpha_1| < n|P(x)||P'(x)|^{-1}, |x-\alpha_1| < 2^{n-1}|P(x)||P'(\alpha_1)|^{-1}.$$

Лемма 1 хорошо известна [4; 10].

Л е м м а 2. *Пусть $P_1(x)$ и $P_2(x)$ – два целочисленных многочлена без общих корней с условиями*

$$\deg P_1 \le n, \deg P_2 \le n, \quad H(P_1) \le Q, \quad H(P_2) \le Q.$$

Если на некотором интервале J, $\mu J = Q^{-\eta}$, $\eta > 0$, при $\tau > 0$ выполняется неравенство

$$\max_{x \in J}(|P_1(x)|, |P_2(x)|) < Q^{-\tau},$$

то для любого $\delta > 0$ и $Q > Q_0(\delta)$ справедливо неравенство

$$\tau + 1 + 2\max(\tau + 1 - \eta, 0) < 2n + \delta.$$

Лемма 2 доказана в [10].

Пользуясь леммой 1 и системой неравенств (3) при $|P'(x)| > c_9 Q^{-(n-1)/2}$, нетрудно доказать, что

$$\frac{1}{2}|P'(x)| < |P'(\alpha_1)| < 2|P'(x)|$$

и поэтому вместо системы неравенств (3) будем рассматривать систему неравенств

$$\begin{cases} |P(x)| < 2(n+1)Q^{-n}, \\ \frac{1}{2}Q^{-\lambda_0-\varepsilon_3} < |P'(\alpha_1)| < 2\delta_0 Q^{-\lambda_0}. \end{cases}$$

По лемме 1 система неравенств (3) выполняется на интервале

$$\sigma(P): |x-\alpha_1| < c_{10} Q^{-n} |P'(\alpha_1)|^{-1}. \tag{4}$$

Наряду с $\sigma(P)$ рассмотрим интервал

$$\sigma_k(P): |x-\alpha_1| < c_{11} Q^{-k} |P'(\alpha_1)|^{-1}, \ k \in \mathrm{N}. \tag{5}$$

Потребуем, чтобы интервал $\sigma_k(P)$ содержался в I. Для этого должно выполняться неравенство

$$k \ge \gamma_2 + \lambda_0 + \varepsilon_3. \tag{6}$$

Зафиксируем вектор $\overline{b}_k = (a_n, \ldots, a_l)$, состоящий из коэффициентов многочлена $P(x)$. Заметим, что при достаточно большом $Q > Q_0(n)$

$$\#\{\overline{b}_k\} < 2^n Q^{n-k}. \tag{7}$$

Множество многочленов с одним и тем же вектором $\overline{b}_k$ обозначим через $T(\overline{b}_k)$. Для натурального числа $m \ge 3$ интервалы $\sigma_k(P_1)$, содержащие точки не более, чем m интервалов $\sigma_k(P)$,

$P \in T(\overline{b}_k)$, будем называть m-существенными. Если же количество многочленов больше m, то интервал $\sigma_k(P_1)$ назовем m-несущественным.

Существенные интервалы. Множество m-существенных интервалов обозначим, как $M_m(\overline{b}_k)$. Имеем

$$\sum_{\sigma_k(P_1) \in M_m(\overline{b_k})} \mu\sigma_k(P_1) \le m\mu I. \tag{8}$$

Из (4) и (5) следует, что

$$\mu\sigma(P_1) \le c_{10} c_{11}^{-1} Q^{-n+k} \mu\sigma_k(P_1),$$

откуда с учетом (7) и (8) получаем

$$\sum_{\overline{b}_k} \sum_{\sigma_k(P_1) \in M_m(\overline{b_k})} \mu\sigma(P_1) \le m \cdot 2^n c_{10} c_{11}^{-1} \mu I < \frac{1}{2s} \mu I$$

при подходящем выборе c_{11}.

Несущественные интервалы. Разложим $P_1(x)$ при $x \in \sigma_k(P_1)$ в ряд Тэйлора с остаточным членом в форме Лагранжа и оценим $|P_1(x)|$ сверху

$$P_1(x) = P_1'(\alpha_1)(x - \alpha_1) + \frac{1}{2} P_1''(\xi)(x - \alpha_1)^2, \xi \in (\alpha_1, x).$$

Так как величина $|x - \alpha_1|$ оценена в (4), то

$$|P_1'(\alpha_1)(x - \alpha_1)| < c_{11} Q^{-k},$$

а

$$\left| \frac{1}{2} P_1''(\xi)(x - \alpha_1)^2 \right| < c_{12} Q^{1-2k+2\lambda_0+2\varepsilon_3}.$$

Если

$$k > 2\lambda_0 + 1 + 2\varepsilon_3,$$

то при достаточно больших Q получаем

$$|P_1(x)| < 2c_{12} Q^{-k}. \tag{9}$$

На интервале $\sigma_k(P_1)$ имеется не менее m многочленов $P_j(x) \in M_m(\overline{b}_k)$, $2 \le j \le m$, и для всех них справедливо неравенство (9). Первые коэффициенты многочленов $P_j(x)$ совпадают и поэтому для многочленов $R_j(x) = P_{j+1}(x) - P_1(x)$ верны неравенства

$$|R_j(x)| < 4c_{12} Q^{-k}, \deg R_j(x) \le k.$$

Если среди многочленов $R_j(x)$ окажутся по крайней мере два неприводимых, то они не имеют общих корней и можно применить лемму 2. В данном случае имеем

$$\tau = k, \eta = k - \lambda_0 - \varepsilon_3$$

и

$$\tau + 1 + 2(\tau + 1 - \eta) = k + 3 + 2\lambda_0 + 2\varepsilon_3, \tag{10}$$

что больше, чем $2k + \delta$, при $k < 2\lambda_0 + 3 + 2\varepsilon_3 - \delta$. Пришли к противоречию.

Возьмем $\lambda_0 = \gamma_2 - 1$. Натуральное число k должно по (6) и (10) удовлетворять неравенству

$$2\gamma_2 - 1 + 2\varepsilon_3 \le k \le 2\gamma_2 + 1 + 2\varepsilon_3 - \delta.$$

Поскольку k находится в интервале длины $2 - \delta > 1,9$ при $\delta < 0,1$, то такое целое число всегда можно выбрать.

Если из $m - 1$ многочленов $R_j(x)$ нельзя выбрать два неприводимых, то

$$R_j(x) = t_1(x) t_2(x).$$

Обозначим через $\deg t_1 = n_1$ и $H(t_1) = Q^{\lambda_1}$. Тогда $\deg t_2 \le k - n_1$, $H(t_2) < c_{13} Q^{1-\lambda_1}$ [4]. Найдем число a такое, что для всех $x \in \sigma_k(P_1)$ выполняется

$$|t_1(x)| < c_{14}\,Q^{-a} = c_{14}H(t_1)^{-a/\lambda_1},$$

$$|t_2(x)| < c_{15}Q^{-k+a} < c_{16}H(t_2)^{-(k-a)/(1-\lambda_1)}.$$

Если $\dfrac{a}{\lambda_1} \geq n_1 + 1$, то это противоречит (2). Если же $a < \lambda_1(n_1 + 1)$, то $\dfrac{k-a}{1-\lambda_1} \geq k > k - n_1 + 1$, что опять же противоречит (2).

Покажем теперь, как из теоремы 2 следует теорема 1. Возьмем $x_1 \in B_1 = I \setminus B_3$. Из теоремы 2 следует, что

$$\mu B_4 \geq \frac{3}{4}\mu I.$$

В точке x_1 выполняется система неравенств

$$\begin{cases} |P_1(x_1)| < 2(n+1)Q^{-n}, \\ |P_1'(x_1)| \geq \delta_0 Q^{-\gamma_2+1}. \end{cases}$$

Используя лемму 1 для корня $\alpha_1(P_1)$, ближайшего к x_1, верно неравенство

$$|x_1 - \alpha_1| < 2^n(n+1)\delta_0^{-1}Q^{-n-1+\gamma_2}. \tag{11}$$

Неравенству (11) могут удовлетворять и другие корни $P_1(x)$, поэтому мера множества $B_5 \subset I$ всех $x \in I$, для которых $|P_1(x)| < 2(n+1)Q^{-n}$ при фиксированном многочлене $P_1(x)$ не превосходит $\mu B_5 = 2^{n+1}(n+1)^2\delta_0^{-1}Q^{-n-1+\gamma_2}$. Возьмем точку $x_2 \in B_4 \setminus B_5$. Такие точки существуют, поскольку $\mu B_5 < \dfrac{3}{4}\mu I$. Для нее найдем многочлен $P_2(x)$ и корень $\alpha_1(P_2)$. Построение точек $x_3,\ldots,x_t$ и многочленов $P_3(x),\ldots,P_t(x)$ можно продолжать до тех пор, пока будет выполняться неравенство $(t-1)(n+1)^2 2^{n+1}\delta_0^{-1}Q^{-n-1+\gamma_2} < \dfrac{3}{4}\mu I$, а при замене $t-1$ на t знак неравенства меняется на противоположный. Поэтому

$$t > \frac{3}{4}(n+1)^{-2}2^{-n-1}\delta_0 Q^{n+1-\gamma_2}\mu I$$

и теорема 1 доказана.

Список использованной литературы

1. *Kuipers, L.* Uniform distribution of sequences. Pure and Applied Mathematics / L. Kuipers, H. Niederreiter. – New York; London; Sydney, 1974. – xiv+390 p.

2. *Baker, A.* Diophantine approximation and Hausdorff dimension / A. Baker, W. Schmidt // Proc. London Math. Soc. – 1970. – Vol. 21, N 3. – P. 1–11.

3. *Bugeaud, Y.* Approximation by algebraic numbers / Y. Bugeaud // Cambridge Tracts in Mathematics. – 2004. – Vol. 160. – 274 p.

4. *Спринджук, В. Г.* Проблема Малера в метрической теории чисел / В. Г. Спринджук. – Минск: Наука и техника, 1967. – 184 с.

5. *Каляда, Д. У.* Аб размеркаванні рэчаісных алгебраічных лікаў дадзенай ступені / Д. У. Каляда // Докл. НАН Беларуси. – 2012. – Т. 56, № 3. – С. 28–33.

6. *Берник, В. И.* Распределение действительных алгебраических чисел произвольной степени в коротких интервалах / В. И. Берник, Ф. Гетце // Изв. РАН. Сер. мат. – 2014. – Т. 79, № 1. – С. 21–42.

7. *Гётце, Ф.* Алгебраические числа в коротких интервалах / Ф. Гётце, А. Г. Гусакова // Докл. НАН Беларуси. – 2015. – Т. 59, № 4. – С. 11–16.

8. *Касселс, Дж. В. С.* Введение в теорию диофантовых приближений / Дж. В. С. Касселс. – Москва: Изд-во Иностр. Литер., 1961. – 213 с.

9. *Budarina, N.* Distance between conjugate algebraic numbers in clusters / N. Budarina, F. Goetze // Math. Notes. – 2013. – Vol. 94, N 5. – P. 816–819.

10. *Берник, В. И.* Применение размерности Хаусдорфа в теории диофантовых приближений / В. И. Берник // Acta Arith. – 1983. – Vol. 42, N 3. – P. 219–253.

Поступило в редакцию 14.09.2015